ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ОТРАСЛЕВАЯ МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2019-2020 УЧ. ГОД

Решения к задачам очного тура
9-10 классы

Вариант 1

Задание 1.

Имеем 33 - $8\sqrt{17} = (\sqrt{17} - 4)^2$. Поэтому $\sqrt{17} - \sqrt{1 - 8(\sqrt{17} - 4)} = \sqrt{17} - \sqrt{33 - 8\sqrt{17}} = \sqrt{17} - (\sqrt{17} - 4) = 4$. Поэтому ответ: $\{2\}$

Задание 2.

Сравним эти числа: $(8{\cdot}1111)^{10}$ v $(9{\cdot}11)^{20}$ $<=> 8 \cdot 1111 \text{ v } 81 \cdot 11^2 <=> 8 \cdot 101 \cdot 11 \text{ v } 81 \cdot 11^2 <=> 808 \text{ v } 81 \cdot 11 = 891 =>$ первое число меньше второго.

Ответ: первое число меньше.

Задание 3.

В первом неполном произведении последняя цифра 8, во втором 5. Это возможно только, если последняя цифра первого множителя 1, а второй оканчивается на 58. Так как второе неполное произведение трехзначно, то первая цифра первого множителя 1. Далее в первом неполном произведении может получиться при умножении первого множителя на 8 в начале только 10. Значит, при второй цифры в уме осталось 2. Это возможно только, если вторая цифра первого множителя 3. В третьем неполном произведении получилось больше, чем в первом. Значит первая цифра второго множителя больше последней. А тогда она равна 9. Таким образом, первый множитель 131, второй 958.

Ответ: 131, 958

Задание 4.

Так как разность $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$, а $(\frac{1}{2})^{20} < 0{,}000001$, то данное выражение с требуемой точностью равно нулю.

Ответ: $\{0\}$

Задание 5

$$54\left(-7+\frac{37}{x+2}-6+\frac{37}{x+5}\right)+739=37\left(-10+\frac{54}{x+3}+11+\frac{54}{x+6}\right)$$

$-54\cdot 13+54\cdot 37\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}\right)+739=37+37\cdot 54\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}\right)$

$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}$; $\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+3}$;

$\frac{2}{(x+6)(x+2)}=\frac{1}{(x+5)(x+3)}$;

$x^2+8x+18=0 \Rightarrow \frac{Д}{2}<0 \Rightarrow$ Решений нет.

Ответ: нет решений

Задание 6.

Заметим, что функция от x, расположенная в левой части уравнения, ограничена сверху, наибольшее ее значение равно 2^a, в то время как справа расположена функция (от y), наименьшее значение которой равно 6 – a. Значит для существования единственной пары (x, y), удовлетворяющей данному уравнению, необходимо и достаточно, чтобы $2^a = 6 - a$, отсюда a = 2 (слева функция возрастает, справа убывает).

Ответ: a = 2.

Задание 7.

Сделаем чертеж. Тогда по условиям задачи получим, что

$S_{BCE}\cdot S_{АДЕ}=S_{ABE}\cdot S_{ДCE}=1$. Отсюда: $S_{BCE}+S_{АДЕ}+S_{ABE}+S_{ДCE}\le 4 \Rightarrow S_{АДЕ}+\frac{1}{S_{АДЕ}}\le 2$. С другой стороны, сумма двух положительных взаимно обратных чисел всегда ≥ 2, следовательно $S_{АДЕ}=S_{BCE}=1$. Итак, треугольники на которых АВСД поделен диагоналями, равновелики, поэтому он параллелограмм и ВС = АД = 3. Ответ: {3}.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ОТРАСЛЕВАЯ МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2019-2020 УЧ. ГОД
Решения к задачам очного тура
9-10 классы

Вариант 2

Задание 1.

Сравним эти два числа: $(9(1111))^{10}$ v $(9\cdot 11)^{20}$. Извлекая корень десятой степени, получим:

$$9\cdot 1111 \text{ v } (9\cdot 11)^2 <=> 9\cdot 101\cdot 11 \text{ v } 9^2\cdot 11^2 <=> 101 \text{ v } 99$$

Следовательно первое число больше.

Ответ: первое число больше

Задание 2.

Имеем: $3 - 8\sqrt{19 - 2\cdot 4\sqrt{19} + 16} = 3 - 8\sqrt{(\sqrt{19} - 4)^2} = 3 - 8(\sqrt{19} - 4) = 35 - 8\sqrt{19}$

Значит $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{-8\sqrt{19} + 35}} = \sqrt{\sqrt{19} - (\sqrt{19} - 4)} = \sqrt{4} = 2$

Ответ: {2}

Задание 3.

Так как на конце результата цифра 0, то первый множитель оканчивается цифрой 5 или нулем. По цифре 7 и множителю 2 определяем, что первый множитель начинается с цифры 3. По второму неполному произведению определяем, что вторая цифра второго множителя 1. И так, первый множитель 385, второй 412 или первый 380, а второй 412.

Ответ: 385 и 412, или 380 и 412.

Задание 4.

Так как $2{,}82 < 2\sqrt{2} < 2{,}83$, а $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, то разность этих чисел, очевидно, меньше 0,2. Так как $(0{,}2)^{20} = \frac{2^{20}}{10^{20}} = \frac{(1024)^2}{10^{20}} < \frac{10^7}{10^{20}} = 10^{-13}$, то данное выражение с требуемой точностью равно нулю.

Ответ: {0}

Задание 5.

Пусть а = 0, тогда F (x) = - 8, f(x) = 3 x^2 – 4. Минимум f (x) = – 4, следовательно а ≠ 0. Так как речь идет о наибольшем значении F(x), то это возможно лишь при $a < 0$. Имеем: $F(x) = 3a(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{a}{3} - 8$. max F (x) будет равен $-\frac{a}{3} - 8$. Далее: $f(x) = 3(x - \frac{a}{3})^2 - \frac{a^2}{3} - 4$. Тогда min f(x) равен $-\frac{a^2}{3} - 4$. Отсюда имеем $-\frac{a^2}{3} - 4 = -\frac{a}{3} - 8$, $a^2 - a - 12 = 0$,

$a = (-3, 4)$. Следовательно $a = -3$.

Сделаем проверку. При а = -3 max F (x) $= -7$, а min f(x) = -7 т.е. условия задачи выполнены.

Ответ: {-3}

Задание 6.

ОДЗ $x \neq -1$, $x \neq -2$, $x \neq -3$, $x \neq -4$

$$83\left(-9 + \frac{43}{x+1} - 7 + \frac{43}{x+4}\right) + 1371 = 43\left(-13 + \frac{83}{x+2} + 14 + \frac{83}{x+3}\right);$$

$$-83 \cdot 16 + 1371 + 83 \cdot 43\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4}\right) = 43 + 43 \cdot 83\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right);$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3};\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4};$$

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} = \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)} \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -2{,}5$$

$x^2 + 5x + 4 - (X^2 + 5x + 6) = 0$ нет решений

Ответ: $x = -2{,}5$

Задание 7.

Пусть Н – основание перпендикуляра, опущенная из точки К на АВ . Проведем через точку К – середину СД прямую параллельную АВ и обозначим буквами Е и F точки пересечения этой прямой с прямыми ВС и СД соответственно. Заметим, что АВЕF – параллелограмм. Поскольку прямые АД и ВС параллельны, то углы КСЕ и КДF равны. Тогда в силу того, что СК = КД, получаем равенство треугольников СКЕ и ДКF (по стороне и двум прилежащим углам). Поэтому

$S_{СКЕ} = S_{ДКF} \Rightarrow S_{АВСД} = S_{АВЕF} = |AB||KH| = cd$.

Ответ: cd.